1Reelle Zahlen

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
Irrationale Zahlen sind unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche, z.B. $\sqrt{2}$, π, 1,010010001...

2Potenzen mit rationalen Exponenten

2.1Die n-te Wurzel

Definition: Die n-te Wurzel aus *a* ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$, dabei **muss** a ≥ 0 sein! (a heißt **Radikand**)

$$\boxed{x = \sqrt[n]{a} \quad n \in \mathbb{N};\ a \in \mathbb{R}_0^+}$$

- $\sqrt[3]{8} = 2$, denn $2^3 = 8$
- $\sqrt[n]{0} = 0$, denn $0^3 = 0$
- $\sqrt[3]{343} = 7$, denn $7^3 = 343$

Potenzschreibweise der n-ten Wurzel: $\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$

Insbesondere ist die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$
- $343^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{343} = 7$

2.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Für **positive** Basis a gilt: $\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p}$ | $p \in \mathbf{Z};\ q \in \mathbb{N}$

Rechnen mit n-ten Wurzeln durch Umformen in Potenzen:

• $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$; $\frac{1}{\sqrt[5]{8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{5}}} = 2^{-\frac{3}{5}}$

•Auch für Potenzen mit rationalen Exponenten gelten die Potenzgesetze (s. Grundwissen 8. Klasse, Kapitel 5.3)

2.3 Rechnen mit Wurzeln

• $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 7^{\frac{6}{6}} = 7$

•Summen und Differenzen dürfen nur bei **gleichem Radi-kanden** und **gleichem n** zusammengefasst werden

$$\sqrt{a} + 2\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{a} = 3\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{a}$$

•Taschenr.: $\sqrt[7]{20} = 20^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}53$ Tippe: 20 x^y (1:7) =

2.4 Rechnen mit Quadratwurzeln

• $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ falls } a \geq 0 \\ -a, \text{ falls } a < 0 \end{cases}$ a beliebig

Quadrieren und Radizieren sind nur für **nichtnegative** Zahlen umgekehrte Rechenarten.

•**Gliedweises** Radizieren und Zusammenfassen bei Produkten und Quotienten:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ ; } a, b \geq 0$$

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \text{ ; } a,\ b \geq 0$$

•Summen und Differenzen dürfen **nicht** gliedweise radiziert werden:

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}\text{ ,} \qquad \textbf{insbesondere: } \sqrt{a^2 \pm b^2} \neq a \pm b$$

Aber: $\sqrt{(a \pm b)^2} = |a \pm b|$

2.5Teilweises Radizieren bei Quadratwurzeln

Der Radikand wird in ein Produkt zerlegt, so dass ein Faktor eine Quadratzahl ist.

Beispiele: $\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = 7 \cdot \sqrt{3}$

$\sqrt{x^5} = \sqrt{x^4 \cdot x} = x^2\sqrt{x} \text{ ; } x \geq 0$

3Lösen quadratischer Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0 \text{ ; } a \neq 0$ nennt man **quadratische Gleichung**.

3.1Reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$

In diesem Fall lässt sich die quadratische Gleichung in die **reinquadratische** Form $x^2 = d$ bringen.

z.B.: $3x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow L = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

3.2 Ausklammern $ax^2 + bx = 0$

z.B.: $4x^2 + 12x = 0$

$4x(x + 3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = -3; \quad \Rightarrow L = \{0; -3\}$

3.3 Lösungsformel

Für die Lösungen der quadratischen Gleichung gilt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

z.B.: $-2x^2 - x + 3 = 0$; $a = -2$, $b = -1$, $c = 3$ $\Rightarrow$ $L = \{1; -1{,}5\}$

(ausführlicheres Beispiel s. Kap. 9, S. 11 unten)

3.4 Diskriminante

Der Ausdruck $b^2 - 4ac$ wird als **Diskriminante D** bezeichnet.

Die quadratische Gleichung hat für $D > 0$ genau zwei Lösungen
für $D = 0$ genau eine Lösung
für $D < 0$ keine Lösung

3.5 Faktorisieren eines quadratischen Terms

Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

3.6 Substitution

Die Gleichung $ax^4 + bx^2 + c = 0$ kann durch die Substitution $z = x^2$ in $az^2 + bz + c = 0$ umgewandelt und z.B. nach Kapitel 3.3 gelöst werden.

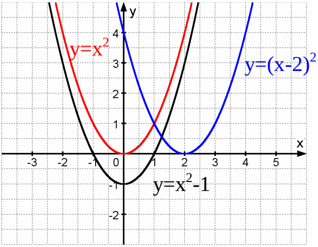
4 Quadratische Funktionen

Der Graph der Funktion $x \mapsto y \text{ mit } y = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt **Parabel**.

4.1 Normalparabel

Die Funktionsgleichung der Normalparabel lautet $y = x^2$.

Rechtes Bild: Verschiebung der Normalparabel



4.2 Eigenschaften des Graphen

•Scheitel $S(x_S \mid y_S)$

Je nach Öffnung höchster oder tiefster Punkt der Parabel; die Scheitelkoordinaten sind aus der Scheitelgleichung ersichtlich:

$$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \quad \Rightarrow \quad S(x_S \mid y_S)$$

z.B.: $y = 3(x + 1{,}5)^2 - 10{,}75 \quad \Rightarrow \quad S\,(-1{,}5 \mid -10{,}75)$

Bestimmen der Scheitelpunktform mit quadratischer Ergänzung: s. Kapitel 10 (S. 13)

•Öffnungsrichtung/Wertemenge W

$a > 0 \Rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet, $W = [y_S; \infty[$

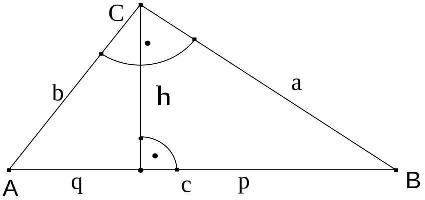
$a < 0 \Rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet, $W =]-\infty; y_S]$

•Parabelform

Für $0 < |a| < 1$ ist die Parabel breiter, für $|a| < 1$ ist sie schlanker als die Normalparabel.

5 Das rechtwinklige Dreieck

5.1 Die Satzgruppe des Pythagoras



Satz des Pythagoras: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat flächengleich der Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

(für c = Hypotenuse und a, b = Katheten)

Höhensatz: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

Kathetensätze: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist jedes Kathetenquadrat flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$$\boxed{a^2 = c \cdot p \text{ bzw. } b^2 = c \cdot q}$$

5.2Trigonometrische Definitionen (0°<α<90°)

Sinus: $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Kosinus: $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Tangens: $\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

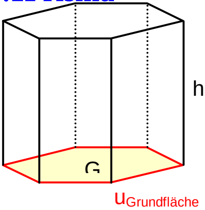
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Schreibweise: $\sin^2\alpha := (\sin\alpha)^2$

α	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosα	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanα	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

6 Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel

6.1 Prisma



Volumen $V = G \cdot h$

Mantelfläche: $M = u_{Grundfläche} \cdot h$

Oberfläche: $O = 2G + M$

6.2 Zylinder

Volumen $V = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

Mantelfläche: $M = u_{Kreis} \cdot h = 2r\pi \cdot h$

Oberfläche: $O = 2G + M = 2r^2\pi h + 2r\pi h$

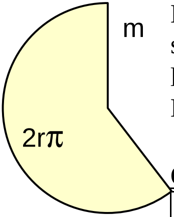
6.3 Pyramide

Volumen: $V = \frac{1}{3}G \cdot h$

Oberfläche: $O = G + M$

6.4 Kegel

Volumen: $V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot h$

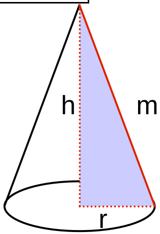


Die Mantelfläche M ist ein Kreissektor mit dem Radius *m* (Mantellinie) und der Bogenlänge 2rπ
Daraus lässt sich ableiten:

$M = m\pi r$

Oberfläche:

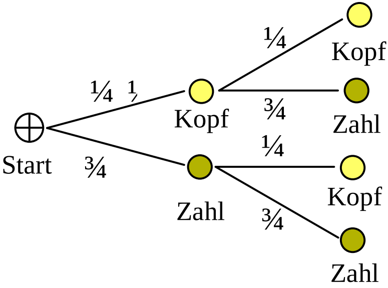
$O = M + G = m\pi r + r^2\pi$



Es gilt: $m^2 = h^2 + r^2$

7 Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Bsp.: zweimaliges Werfen einer gezinkten Münze



Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, die von einem Knoten ausgehen, beträgt immer 1.

<u>1. Pfadregel</u>: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu dem Ergebnis führt.

Bsp.: $P(\{\text{Kopf}, \text{Kopf}\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

<u>2. Pfadregel</u>: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, aus denen sich das Ereignis zusammensetzt.

Bsp.: $P(\text{"Genau 1x Kopf"}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16}$

8Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

Diese lassen sich im Wesentlichen lösen wie Systeme mit drei Variablen (s. Grundwissen 8. Klasse).

Klassischer Anwendungsfall für ein solches System: Der Graph G_p einer quadratischen Funktion p(x) mit $p(x) = ax^2 + bx + c$ soll durch drei vorgegebene Punkte A, B und C verlaufen.

Bsp.: G_p soll durch A (5|–21), B(7|3) und C(11|3) verlaufen.

Ansatz: Hierzu setzen wir die Koordinaten der Punkte jeweils in die Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$ ein:

$$
\begin{aligned}
&(I) & -21 &= a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \\
&(II) & 3 &= a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c \\
&(III) & 3 &= a \cdot 11^2 + b \cdot 11 + c
\end{aligned}
$$

Lösung: [...] $\Rightarrow$ $a = -2,\ b = 36,\ c = -151$

$\Rightarrow$ $p(x) = -2x^2 + 36x - 151$

9Bruchgleichungen

Sie tauchen z.B. auf, wenn die Schnittpunkte zweier gebrochen rationaler Funktionen bestimmt werden sollen. Lösen lassen sich Bruchgleichungen zumeist mit „Über-Kreuz-Multiplizieren“.

Bsp.: $f(x) = \frac{7}{5x-4}$, $g(x) = \frac{4x-13}{4x+1}$

Bestimmen der Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{7}{5x-4} = \frac{4x-13}{4x+1} \quad \Big| \cdot (5x-4)(4x+1)$$

$$7(4x+1) = (4x-13)(5x-4)$$

$$28x+7 = 20x^2 - 16x - 65x + 52$$

$$28x+7 = 20x^2 - 81x + 52$$

$$20x^2 - 109x + 45 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{109 \pm \sqrt{109^2 - 4 \cdot 20 \cdot 45}}{2 \cdot 20}$$

$$x_{1/2} = \frac{109 \pm 91}{40}$$

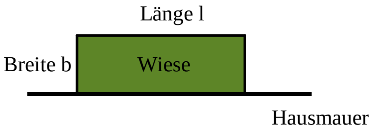
$$x_1 = 5;\ x_2 = 0{,}45 \quad (y_1 = \tfrac{1}{3};\ y_2 = -4)$$

10Extremwertprobleme/quadratische Ergänzung

Bei dieser Art von Problemen soll eine Zahl gefunden werden, die z.B. einen Term je nach Problem einen möglichst kleinen oder einen möglichst großen Wert (allgemein: einen extremen Wert) annehmen lässt.

Bsp.: Mit einem Zaun der Länge 12 m soll ein rechteckiges Wiesenstück mit möglichst großem Flächeninhalt A umgrenzt werden; die umzäunte Fläche soll an einer Hausmauer liegen. Wie groß muss b sein?

Skizze:



Für den Zaun gilt: (I) $b + l + b = 12$ [m]
Für den Flächeninhalt A: (II) $A = l \cdot b$
Wir lösen (I) nach l auf: (I´) $l = 12 - 2b$
(I´) in (II): $A = (12 - 2b) \cdot b = 12b - 2b^2 = -2b^2 + 12b$

Nun formen wir den Term so um, dass die Scheitelkoordinaten ablesbar sind (s. Kap. 4.2). Dazu verwenden wir die quadratische Ergänzung.

Umformen in die **Scheitelpunktform** mit Hilfe der **quadratischen Ergänzung**:

$$
\begin{aligned}
A &= -2b^2 + 12b = -2(b^2 - 6b) && \text{(Ausklammern Vorfaktor)}\\
&= -2[b^2 - 6b + (6/2)^2 - (6/2)^2] && \text{(quadratische Ergänzung)}\\
&= -2[b^2 - 6b + 9] + 18 &&\\
&= -2[b - 3]^2 + 18 && \text{(Anwenden der binomischen Formel)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $(3|18)$

Da die zugehörige Parabel nach unten geöffnet ist (Vorfaktor -2 ist negativ), ist der Scheitel der höchste Punkt der Parabel; hier liegt also der Punkt mit dem größten Funktionswert.

<u>Interpretation</u>: Für die Breite $b = 3$ [m] erhalten wir den größten Flächeninhalt $A = 18$ [m²]. Für die Berechnung der dazugehörigen Länge l verwenden wir :

(I´) $l = 12 - 2 \cdot 3 = 6$ [m]

Auch möglich:

(II) $A = l \cdot b$

(II´) $l = A : b = 18 : 3 = 6$ [m]