# 1 Beziehungen zwischen Größen

## 1.1 Direkte Proportionalität

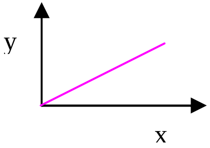
Bei einer direkten Proportionalität wird dem doppelten, dreifachen,...Wert der einen Größe x der doppelte, dreifache,... Wert der anderen Größe y zugeordnet.

**Quotientengleichheit**:

$\frac{y}{x} = m$ (konst.)

m heißt Proportionalitätskonstante.

**Graph:** Eine vom Nullpunkt ausgehende Halbgerade.




*Bsp.: Liter Benzin (x) ↔ Preis in € (y)*

**Dreisatz (Schlussrechnung):**

*Bsp.:* 7 ℓ ↔ 7,84 €

1 ℓ ↔ 7,84 € : 7 = 1,12 €

20 ℓ ↔ 22,40 €

## 1.2 Indirekte (umgekehrte) Proportionalität

Bei einer indirekten Proportionalität wird dem doppelten, dreifachen, ... Wert der einen Größe die Hälfte, der dritte Teil,... der anderen Größe zugeordnet.

**Produktgleichheit**. Gemeinsamer Produktwert $x \cdot y = a$ (konst.).

**Graph:** Hyperbel

*Bsp.: Anzahl der Arbeiter ↔ Arbeitszeit*

**Dreisatz (Schlussrechnung):**

*Bsp.:* 7 A. ↔ 40 h
1 A. ↔ 7·40 h = 280 h
5 A. ↔ 280 h : 5 = 56 h

# 2 Lineare Funktionen

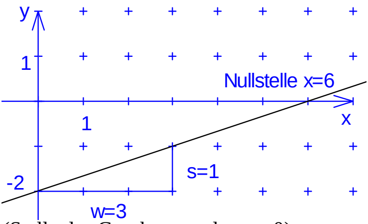
Eine Zuordnung x ↦ y, die jedem x aus dem Definitionsbereich genau ein y aus dem Wertebereich zuordnet, heißt **Funktion.**

**Graphen von Funktionen** werden von jeder Parallelen zur y-Achse höchstens einmal geschnitten.

## 2.1 Grundbegriffe

$$f: x \mapsto mx + t \quad \text{mit } \mathbb{D} = \mathbb{Q}$$

Der Graph ist eine Gerade mit Steigung m und y-Abschnitt t.




z.B.: $m = \frac{1}{3}$ ; $t = -2$

$f: x \mapsto \frac{1}{3}x - 2$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$

Allgemein:

Nullstelle: $mx + t = 0$ (Stelle des Graphen, an der y = 0)

Steigung: $m = \frac{s}{w} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

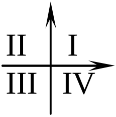
## 2.2 Geradengleichung

$y = mx + t$

- Je größer $|m|$ ist, desto steiler ist die Gerade.
- Für $m<0$ **fällt**, für $m>0$ **steigt** die Gerade; für $m=0$ verläuft sie parallel zur x-Achse
- Alle Geraden mit <u>gleicher Steigung</u> m sind **parallel**.

## 2.3 Besondere Geraden ($a \in \mathbb{Q}$)

| | |
|---|---|
| $y = ax$ ; | Ursprungsgerade |
| $y = x$ ; | Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten |
| $y = -x$ ; | Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten |
| $y = a$ | Parallele zur x-Achse durch $(0\|a)$ |
| $x = a$ | Parallele zur y-Achse durch $(a\|0)$ *(keine Funktion!)* |




Punkt auf Geraden:

Ein Punkt liegt auf einer Geraden g, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen:

*z.B.:* $(4\,|\,5) \in g$ mit $g : x \mapsto y = 2x - 3$

denn $\mathbf{5} = 2 \cdot \mathbf{4} - 3$ (w)

(Einsetzen der Koordinaten in die Funktionsgleichung)

## 2.4 Geradengleichung aus 2 Punkten aufstellen

*z.B.: Gerade g soll durch* $A(\,2\,|\,5)$ *und* $B(-2\,|\,4)$ *verlaufen:*

*Steigung:* $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5-4}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$ *, also:*

$$g : y = \tfrac{1}{4}x + t$$

*Nun Koordinaten von A einsetzen:* $5 = \frac{1}{4} \cdot 2 + t$ ;

*daraus bekommt man:* $t = 4\frac{1}{2}$ ;

*also:* $y = \frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}$ *verläuft durch A und B.*

## 2.5 Schnittpunkt S zweier Geraden berechnen

z. B. $f : x \mapsto 2x + 4; \quad g : x \mapsto -x + 3$

*Gleichsetzen der Funktionsterme:* $2x + 4 = -x + 3$

*Auflösen nach x:* $x = -\frac{1}{3}$

*Einsetzen des x in eine der Funktionsgleichungen:*

$$y = 2 \cdot (-\tfrac{1}{3}) + 4 = 3\tfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S(-\tfrac{1}{3} \,|\, 3\tfrac{1}{3})$$

# 3 Lineare Gleichungssysteme

z.B.: $$\begin{aligned} \text{I. } & -5x+9y=-8 \\ \text{II. } & 10x-3y=6 \end{aligned}$$

## 3.1 Graphische Lösung

Geraden einzeichnen; der Schnittpunkt ergibt die Lösung.

## 3.2 Additionsverfahren

Falls nötig, erst mit geeignetem Faktor multiplizieren, damit Koeffizienten (vom Betrag) gleich, z.B. I. mit 2 multiplizieren:

$$\Rightarrow \quad \text{I. } -10x+18y=-16$$

$$\underline{\text{II. } 10x-3y=6}$$

$$\text{I.+II.}: 0+15y=-10 \Rightarrow y=-\tfrac{10}{15}=-\tfrac{2}{3}$$

$y=-\frac{2}{3}$ in I. eingesetzt $\Rightarrow$ $x=\frac{2}{5}$, also: $\mathbb{L}=\{(\frac{2}{5}\,|-\frac{2}{3})\}$

## 3.3 Einsetzungsverfahren

| | |
|---|---|
| aus I. | $x=\frac{9}{5}y+\frac{8}{5}$ (also I. nach x aufgelöst!) |
| in II. | $10\cdot(\frac{9}{5}y+\frac{8}{5})-3y=6$ |
| ausrechnen: | $18y+16-3y=6;\ y=-\frac{2}{3}$ |
| in I. (oder II.) | $x=\frac{2}{5}$ also: $\mathbb{L}=\{(\frac{2}{5}\,|-\frac{2}{3})\}$ |

## 3.4 Anzahl der Lösungen

- Genau eine Lösung (Die Geraden schneiden sich)
- Keine Lösung (Die Geraden sind echt parallel)
- Unendlich viele Lösungen (Die Geraden sind identisch)

# 4 Laplace-Experimente

## 4.1 Grundbegriffe

Jeden möglichen Ausgang eines Zufallsexperiments nennt man jeweils ein **Ergebnis $\omega$**, alle Ergebnisse zusammen bilden den **Ergebnisraum $\Omega$**. Ein **Ereignis E** wird aus einem oder mehreren Ergebnissen gebildet. Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ zu einem Ereignis E enthält alle Ergebnisse, die nicht in E enthalten sind.

Bsp.: Würfeln mit zwei Würfeln, E = „gerade Augenzahl“
$\Omega$={2; 3; ...; 11; 12}; E={2; 4; ...; 10; 12}; $\overline{E}$={3; 5; ...;11}

## 4.2 Die Laplace-Annahme

**Laplace-Experiment**: Die Wahrscheinlichkeit P für jedes Elementarereignis (=Ergebnis) ist gleich groß.

Bsp.: Werfen eines idealen Würfels, Werfen einer idealen Münze

Die Wahrscheinlichkeit P(E) für ein Ereignis E lässt sich dann mit dieser Formel berechnen:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega}$$

Bsp.: Eine Urne enthält drei rote und zwei schwarze Kugeln,
E=„Es wird eine rote Kugel gezogen“

$$P(E) = \tfrac{3}{3+2} = \tfrac{3}{5}$$

# 5 Elementare gebrochen-rationale Funktionen

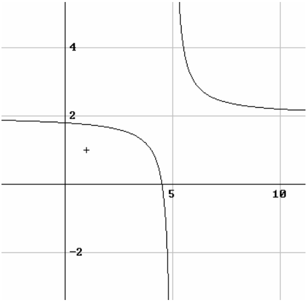
## 5.1 Grundlagen

Funktionen mit einer Variablen x im Nenner
Zur Bestimmung der maximalen **Definitionsmenge ID** muss sichergestellt werden, dass der Nenner nicht Null ergibt.

Bsp.: $f(x)=\frac{1}{x-5}+2$

$\Rightarrow \mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{5\}$

an der Stelle x = 5 hat die Funktion f eine **Polstelle**, der Graph $G_f$ hat hier eine **senkrechte Asymptote**. Außerdem hat der Graph $G_f$ eine **waagrechte Asymptote** bei y = 2 (s. Graph rechts).




## 5.2 Schnittpunkt(e) zweier gebr. rat. Funktionen

Beim Berechnen der Schnittpunkte entsteht eine **Bruchgleichung**:

Bsp.: $f(x)=\frac{2x}{x-5}$, $g(x)=\frac{x+1}{0,5x+3}$

Bestimmen des Schnittpunkts durch Gleichsetzen der Funktionsterme: $\frac{2x}{x-5}=\frac{x+1}{0,5x+3}$

Lösen der Gleichung z. B. durch Über-Kreuz-Multiplizieren:

$$\Rightarrow 2x\cdot(0,5x+3)=(x+1)\cdot(x-5)$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergibt dann x = –0,5. Die zweite Koordinate erhält man durch Einsetzen des x-Werts in eine der beiden Funktionen: f(–0,5) = $\frac{2}{11}$

$\Rightarrow$ Koordinaten des Schnittpunkts: S(–0,5| $\frac{2}{11}$ )

## 5.3 Ganzzahlige Exponenten

Definitionen für $n \in \mathbb{N}$

| | | |
|---|---|---|
| $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$ | $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$ | $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$ |

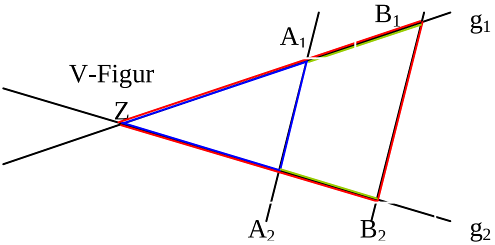
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$*, d.h. "hoch -1" erzeugt den Kehrbruch!*

Rechengesetze:

| **1. Potenzgesetz** | **2. Potenzgesetz** | **3. Potenzgesetz** |
|---|---|---|
| $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$<br>$a^x : a^y = a^{x-y}$ | $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$<br>$a^x : b^x = (a : b)^x$ | $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ |
| $10^3 \cdot 10^5 = 10^8$ | $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$ | $(a^3)^{\frac{1}{3}} = a^{3 \cdot \frac{1}{3}} = a$ |
| Beachte die jeweiligen Definitionsmengen! | | |

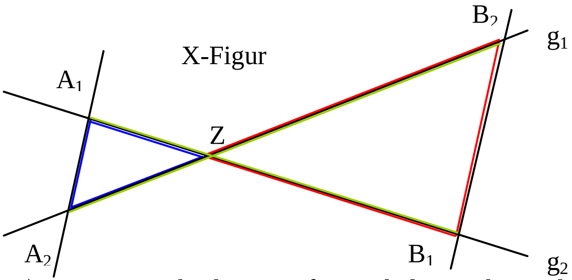
# 6 Strahlensatz

Voraussetzung: Zwei sich schneidende Geraden ($g_1$, $g_2$) werden von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten.



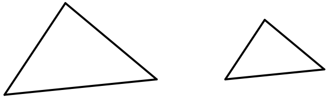

z. B.: $\overline{ZA_1} : \overline{A_1B_1} = \overline{ZA_2} : \overline{A_2B_2}$ (1)

$\overline{ZA_1} : \overline{ZB_1} = \overline{A_1A_2} : \overline{B_1B_2}$ (2)




- Je zwei Abschnitte auf $g_1$ verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf $g_2$. (1)
- Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von Z aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf $g_1$ bzw. $g_2$. (2)

# 7 Ähnlichkeit



## 7.1 Ähnliche Figuren

Zwei Figuren $F_1$ und $F_2$ heißen ähnlich ($F_1 \sim F_2$), wenn sie formgleich sind, d.h. die eine ein maßstabs- und winkeltreues Abbild der anderen ist.

## 7.2 Ähnliche Dreiecke

**Eigenschaften:** Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, sind entsprechende Winkel und entsprechende Seitenverhältnisse gleich groß.

**Ähnlichkeitssätze:**
Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen mit zwei Winkeln des andern übereinstimmen.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen.