1 Reelle Zahlen

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Irrationale Zahlen sind unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche, z.B. $\sqrt{2}$, π, 1,010010001...

2 Die Quadratwurzel

Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

a heißt **Radikand**, er darf **nicht** negativ sein.

Also: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a;\ a \geq 0$

2.1 Rechnen mit Quadratwurzeln

- $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ falls } a \geq 0 \\ -a, \text{ falls } a < 0 \end{cases}$ a beliebig

  Quadrieren und Radizieren sind nur für **nicht negative** Zahlen umgekehrte Rechenarten.

- **Gliedweises** Radizieren und Zusammenfassen bei Produkten und Quotienten

  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $a, b \geq 0$

  $\sqrt{a : b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$; $a, b \geq 0$

- Summen und Differenzen dürfen **nicht** gliedweise radiziert werden

  $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, **insbesondere:** $\sqrt{a^2 \pm b^2} \neq a \pm b$

  Aber: $\sqrt{(a \pm b)^2} = |a \pm b|$

- Summen und Differenzen dürfen nur bei **gleichem Radikanden** zusammengefasst werden

  $\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 3\sqrt{a}$

2.2 Teilweises Radizieren

Der Radikand wird in ein Produkt zerlegt, so dass ein Faktor eine Quadratzahl ist.

Beispiele: $\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = 7 \cdot \sqrt{3}$

$\sqrt{x^5} = \sqrt{x^4 \cdot x} = x^2\sqrt{x}$; $x \geq 0$

3 Lösen quadratischer Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$ nennt man **quadratische Gleichung**.

3.1 Reinquadratische Gleichung

$ax^2 + c = 0$

In diesem Fall lässt sich die quadratische Gleichung in die **reinquadratische** Form $x^2 = d$ bringen.

z.B.: $3x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

3.2 Ausklammern

$ax^2 + bx = 0$

z.B.: $4x^2 + 12x = 0$

$4x(x + 3) = 0$

$x_1 = 0 \quad ; \qquad x_2 = -3$

3.3 Lösungsformel

Für die Lösungen der quadratischen Gleichung gilt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

z.B.: $-2x^2 - x + 3 = 0;\quad a = -2,\ b = -1,\ c = 3 \ \Rightarrow\ L = \{\ 1; -1{,}5\ \}$

3.4 Diskriminante

Der Ausdruck $b^2 - 4ac$ wird als **Diskriminante D** bezeichnet.
Die quadratische Gleichung hat für D > 0 genau zwei Lösungen
für D = 0 genau eine Lösung
für D < 0 keine Lösung

3.5 Faktorisieren eines quadratischen Terms

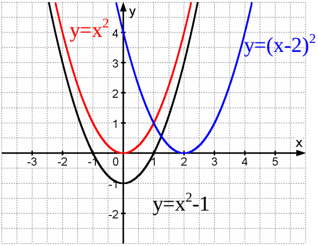
Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt : $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

4 Quadratische Funktionen

Der Graph der Funktion $x \mapsto y \text{ mit } y = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt Parabel.

4.1 Normalparabel

Die Funktionsgleichung der Normalparabel lautet $y = x^2$.



Verschiebung der Normalparabel

4.2 Eigenschaften des Graphen

- **Öffnungsrichtung/Wertemenge**
  $a > 0 \Rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet, $W = [s_2; \infty[$
  $a < 0 \Rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet, $W =]-\infty; s_2]$
- **Scheitel $S(s_1 \mid s_2)$**
  Je nach Öffnung höchster oder tiefster Punkt der Parabel, ersichtlich aus der Scheitelgleichung:
  $y = a \cdot (x - s_1)^2 + s_2$ => $S(s_1 \mid s_2)$
  z.B.: $y = 3(x + 1{,}5)^2 - 10{,}75 \Rightarrow S(-1{,}5 \mid -10{,}75)$
- **Parabelform**
  Für $0 < |a| < 1$ ist die Parabel breiter, für $|a| < 1$ ist sie schlanker als die Normalparabel.

5 Die Wurzelfunktion

$x \mapsto y = \sqrt{x}; x \geq 0$ heißt **Wurzelfunktion**.