1 Rechnen mit Potenzen

Definitionen für $n \in \mathbb{N}$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$	$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$, *d.h. "hoch -1" erzeugt den Kehrbruch!*

1.1 Rechengesetze

1. Potenzgesetz	2. Potenzgesetz	3. Potenzgesetz
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $a^x : a^y = a^{x-y}$	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ $a^x : b^x = (a : b)^x$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
$10^3 \cdot 10^5 = 10^8$	$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$	$(a^3)^{\frac{1}{3}} = a^{3 \cdot \frac{1}{3}} = a$
Beachte die jeweiligen Definitionsmengen!		

- ***Achtung***: *es gibt kein Potenzgesetz für Addition/Subtraktion:*

  $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$, *sondern* $a^2 + \underline{2ab} + b^2$,

  aber Distributivgesetz: $3a^5 + 7a^5 = 10a^5$
- $(x^2 : x^{-5})^{-3} = (x^{2-(-5)})^{-3} = (x^7)^{-3} = x^{-21} = \frac{1}{x^{21}}$

1.2 Die n-te Wurzel

Definition: Die n-te Wurzel aus *a* ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x^n = a$. (Dabei muss a ≥ 0 sein!)

$$\boxed{x = \sqrt[n]{a} \quad n \in \mathbb{N};\ a \in \mathbb{R}_0^+}$$

- $\sqrt[3]{8} = 2$ *denn* $2^3 = 8$; $\quad \sqrt[n]{0} = 0$
- $x^3 = -8$ *hat die* *eine* *Lösung* $x = -2 = -\sqrt[3]{8}$ (*nicht* $\sqrt[3]{-8}$)
- $x^4 = 625$ *hat* *zwei* *L.* $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5$

Potenzschreibweise der n-ten Wurzel: $\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$

- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 7^{\frac{6}{6}} = 7$
- Taschenr.: $\sqrt[7]{20} = 20^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}53$ tippe $20x^y(1:7)$

1.3 Potenzen mit rationalen Exponenten

Für **positive** Basis a gilt: $\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p}$ $(p \in \mathbb{Z};\ q \in \mathbb{N})$

Rechnen mit n-ten Wurzeln durch Umformen in Potenzen:

- $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$; $\quad \frac{1}{\sqrt[5]{8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{5}}} = 2^{-\frac{3}{5}}$

2 Potenzgleichungen

a) Grundform: $\boxed{x^n = a}$

Eine Gleichung der Form $x^n = a$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ hat		
	bei geradem n	***bei ungeradem n***
für $a > 0$ $x^4 = 5$	2 Lösungen $x_1 = \sqrt[n]{a}$ und $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ $x_1 = \sqrt[4]{5}$ und $x_2 = -\sqrt[4]{5}$	die Lösung $x = \sqrt[n]{a}$
für $a = 0$	die Lösung $x = 0$	die Lösung $x = 0$
für $a < 0$ $x^3 = -64$	keine Lösung	Die Lösung $x = -\sqrt[n]{\lvert a \rvert}$ $x = -\sqrt[3]{64} = -4$

➢ $5x^6 - 12 = 2x^4 \cdot x^2 \Leftrightarrow 5x^6 - 12 = 2x^6 \Leftrightarrow 5x^6 - 2x^6 = 12 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x^6 = 12 \Leftrightarrow x^6 = 4$, *also* $x_{1,2} = \pm\sqrt[6]{4} \approx \pm 1{,}26$

(Taschenr.: $\sqrt[6]{4} = 4^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}26$)

b) Für $a \neq 0$ sind die Gleichungen $x^{-n} = a$ und $x^n = \frac{1}{a}$ äquivalent.

- $x^{-3} = 2 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}79$

c) Gleichungen der Form $\boxed{x^{\frac{p}{q}} = a}$ $(p \in \mathbb{Z};\ q \in \mathbb{N};\ a \in \mathbb{R})$ sind nur definiert für $x \in \mathbb{R}_0^+$

Rückführung auf die Grundform:

$$x^{\frac{2}{3}} = 4 \quad |^3 \qquad D = \mathbb{R}_0^+$$

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 4^3$$

Potenzieren ist i.a. keine Äquivalenzumformung! Probe durchführen!

$$x^2 = 64$$

$$x = +8 \quad (-8 \notin D)$$

3 Polynomdivision

Ein Term der Form
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_0 \ldots\ldots a_n \in \mathbb{R};\ a_n \neq 0$
heißt Polynom n-ten Grades.

➢ $5x^4 - 3x^2 + x = 0$,
d.h. $a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -3$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$

Division zweier Polynome:

$(6x^3) : (3x) =$

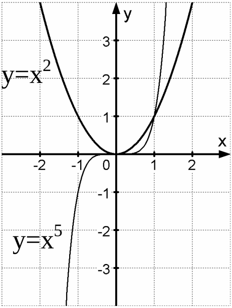
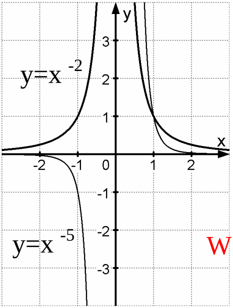
$$(6x^3 + 16x^2 - 7x - 10) : (3x + 2) = 2x^2 + 4x - 5$$

$$\begin{array}{l}
-(6x^3 + 4x^2) \qquad (3x+2) \cdot 2x^2 \\
\hline
\qquad 12x^2 - 7x \qquad (12x^2) : (3x) = \\
\quad -(12x^2 + 8x) \\
\hline
\qquad\qquad -15x - 10 \\
\qquad\quad -(-15x - 10) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

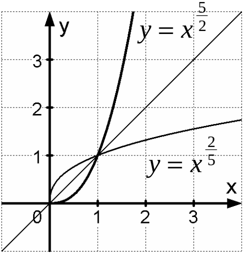
usw.

d.h. $6x^3 + 16x^2 - 7x - 10 = (3x+2) \cdot (2x^2 + 4x - 5)$

4 Potenzfunktionen $\boxed{y = x^n}$

$y = x^n$ $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R}$	$y = x^{-n}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Parabel n-ter Ordnung	Hyperbel n-ter Ordnung
 $W = \mathbb{R}_0^+$ $W = \mathbb{R}$	 $W = \mathbb{R}^+$ $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = x^{\frac{p}{q}}$ $n = \frac{p}{q} > 0;\ n \notin \mathbb{N};\quad D = \mathbb{R}^+$



Die Funktionen $y = x^{\frac{p}{q}}$ und $y = x^{\frac{q}{p}}$ sind <u>Umkehrfunktionen</u> zueinander.

5 Exponentialfunktion

5.1 Exponentielles Wachstum

Konstanter Wachstumsfaktor in gleichen Zeitspannen!

Wachstumsgesetz: $\boxed{y = y_0 \cdot a^x}$

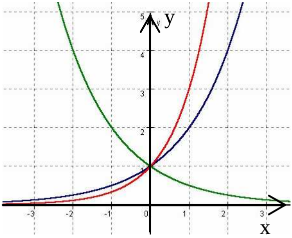
x: Anzahl der Zeitintervalle, y_0 *: Startwert,*

a: Wachstumsfaktor (a>1 Zunahme, a<1 Abnahme)

- Halbwertszeit ist die Zeit, in welcher der Startwert auf die Hälfte gesunken ist.
- Zinseszins: Jährlicher Zinssatz von 4% $\Rightarrow a = 1{,}04$
  Kontostand nach z.B. 20 Jahren (bei 100€ Startwert):
  $$y = y_0 \cdot a^x = 100\,€ \cdot 1{,}04^{20} = 219{,}11\,€$$

5.2 Exponentialfunktionen

$\boxed{y = a^x}$ $a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}, W = \mathbb{R}^+$



streng monoton steigend für a>1
streng monoton fallend für a<1
Die Graphen von

$$y = a^x \text{ und } y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

sind zueinander symmetrisch bzgl. der y-Achse.

6 Logarithmus

Ist $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $\boxed{a^y = x}$, so heißt der Exponent y der **Logarithmus von x zur Basis a**: $\boxed{y = \log_a x}$.

($\log_a x$ ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss um x zu erhalten. "a hoch wieviel ist x"?)

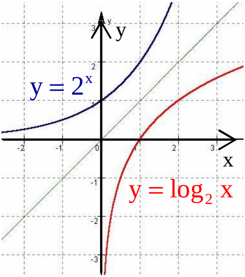
- $\log_2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$
- $\log_{10} 100000 = 5$, denn $10^5 = 100000$
- $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, denn $5^{-1} = \frac{1}{5}$

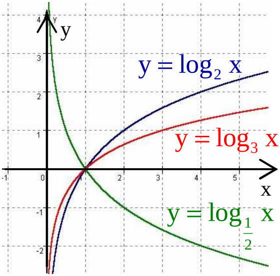
6.1 Die Logarithmusfunktionen

$\boxed{y = \log_a x}$ $D = \mathbb{R}^+$

$y = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion zu $y = a^x$

$W = \mathbb{R}$





6.2 Rechnen mit Logarithmen

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_a(u\cdot v)=\log_a u+\log_a v\\ \log_a(u:v)=\log_a u-\log_a v\\ \log_a u^z = z\cdot\log_a u\end{array}} \quad (a,u,v\in\mathbb{R}^+, a\neq 1, r\in\mathbb{R})$$

<u>Sonderfälle</u>:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^x = x$$

Zehnerlogarithmus-Schreibweise: $\lg x := \log_{10} x$

Praxis: Auf dem TR ist die Zehnerlogarithmus-Taste mit $\boxed{\text{log}}$ beschriftet!

Näherungsweises Berechnen von Logarithmen mit beliebiger Basis auf dem TR z.B. $\mathit{log}_2 5 = \frac{lg\,5}{lg\,2} \approx 2{,}3219$